Veronika Vlnková
http://veronika.host.sk

Grupa S_4

(z toho **A_4** podčiarknutá:)

{(),
(12), (13), (14), (23), (24), (34),
(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243),
(1234), (1432), (1243), (1342), (1324), (1423),
(12)(34), (13)(24), (14)(23)}

Podgrupy A_4

{()}
{(), (12)(34)}
{(), (13)(24)}
{(), (14)(23)}
{(), (123), (132)}
{(), (124), (142)}
{(), (134), (143)}
{(), (234), (243)}
{(), (12)(34), (13)(24), (14)(23)}
A_4

Dôkaz:

Podľa Lagrangeovej vety A_4 (rádu 12) môže mať podgrupy rádu len 1, 2, 3, 4, 6 alebo 12.

Ak podgrupa obsahuje (a, b, c), musí obsahovať aj (a, c, b) ($(a, b, c)^2 = (a, c, b)$). Ak by sme „prihodili" ešte jeden cyklus rádu 3, museli by sme vlastne prihodiť 2. V tom prípade by ale rád podgrupy bol 5 (7, 9) a to by odporovalo Lagrangeovej vete. Ak by sme prihodili cyklus tvaru (ab)(cd), vygenerovali by sme celú A_4.

Ak pridám k cyklu (ab)(cd) ďalší takýto cyklus, vygenerujú spolu i ten tretí, čiže {(), (12)(34), (13)(24), (14)(23)}.

Normálne podgrupy A_4

{()}
{(), (12)(34), (13)(24), (14)(23)}
A_4

Dôkaz:

Ak p je párna permutácia, ktorá zobrazí i na m_i, tak $p(12)(34)p^{-1} = (m_1m_2)(m_3m_4)$. Takže permutácie (12)(34), (13)(24) a (14)(23) konjugujú, teda {(), (12)(34), (13)(24), (14)(23)} je normálna.

Nech N je normálna podgrupa A_4, ktorá obsahuje cyklus $(m_1m_2m_3)$ rádu 3. $p(m_1m_2m_3)^{-1} = (p(m_1)p(m_2)p(m_3))$ pre všetky $p \in A_4$. Teda nejaký cyklus z A_4 rádu 3 konjuguje s $(m_1m_2m_3)$ alebo $(m_1m_3m_2)$. Ale keďže $(m_1m_3m_2) = (m_1m_2m_3)^2$, $(m_1m_3m_2)$ patrí N a teda každý cyklus rádu 3 v A_4 patrí do N. Potom ale N = A_4, keďže A_4 je generovaná cyklami dĺžky 3 (každá párna permutácia sa dá vyjadriť cyklami dĺžky 3). Ukázali sme teda, že ak normálna podgrupa N obsahuje cyklus dĺžky 3, tak N = A_4.

Nech teda N neobsahuje cyklus rádu 3. Potom ale $N \subset \{(1),(13)(24),(12)(34),(14)(23)\}$, keďže $A_4 \setminus$ {(), (12)(34), (13)(24), (14)(23)} sú len cykly rádu 3. Ale keďže ostatné prvky navzájom konugujú, jediná taká podgrupa môže byť {()}.

Faktorové grupy

$A_{4/H}$: H = {(), (12)(34), (13)(24), (14)(23)}
H (123) = {(123), (134), (234), (142)}
H (132) = {(132), (234), (124), (143)}